

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ  
проректор

\_\_\_\_\_ П. А. Машаров  
«17» апреля 2025 г.  
МП

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ**

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа магистратуры
Направление подготовки	01.04.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Магистр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины **«Избранные задачи теории чисел»** для обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

профессор кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений,  
доктор физ.-мат. наук

В.В.Волчков

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений.  
Протокол от 08.04.2025 г. № 9а

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и  
информационных технологий  
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.  
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.  
Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной  
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.  
16.04.2025 г.

В. В. Волчков

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объеме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ, Комплексный анализ, Теория чисел.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Научный семинар по вопросам математического анализа, Гармонический анализ, Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная), Производственная практика: преддипломная практика (обязательная).

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.04.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.В.ДВ.1.1 Избранные задачи теории чисел
Часть образовательной программы	Вариативная часть: выбор обучающегося
Количество зачетных единиц / всего часов	4 / 144

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

### 2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	2	3	17	0	34	93	144	экзамен
Очная, всего			17	0	34	93	144	

## 3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Формирование научного мировоззрения; овладение новым математическим аппаратом; углубленная подготовка в области анализа (вещественного и комплексного); подготовка к профессиональной деятельности; подготовка к чтению специальной литературы.

#### 4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

##### 4.1. Компетенции

ПК-3. Способен осуществлять преподавание по программам бакалавриата и ДПП, ориентированным на соответствующий уровень квалификации

##### 4.2. Индикаторы компетенций

ПК-3.1. Применяет классические и современные математические методы для решения фундаментальных задач анализа и теории чисел.

##### 4.3. Результаты обучения

ПК-3.1.1. Знает определения и утверждения, приёмы доказательства утверждений, методы решения задач анализа и теории чисел.

ПК-3.1.2. Умеет выбирать и использовать необходимые математические методы и вычислительные средства, решать задачи дисциплины.

ПК-3.1.3. Владеет основными методами аналитической теории чисел.

#### 5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. <i>Простые числа</i>	Бесконечность различных множеств простых чисел, Распределение и свойства простых чисел. Теоремы Вильсона, Ферма, Эйлера.
Раздел 2. <i>Основные функции в теории чисел</i>	Функции Эйлера, Мёбиуса, Римана. Число и сумма делителей. Мультипликативность. Свойства мультипликативных функций.
Раздел 3. <i>Уравнения с целочисленными решениями</i>	Задачи, приводящие к уравнениям в целых числах. Решение олимпиадных задач, линейные уравнения. Уравнения Ферма, Эйлера, Пелля. Проблема Варинга и теорема Гильберта.
Раздел 4. <i>Дзета-функция Римана</i>	Определение и свойства дзета-функции Римана. Формула Эйлера. Аналитическое продолжение. Гипотеза Римана и её связь с арифметическими задачами.

#### 6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### 6.1. Форма обучения – очная, курс – 2, семестр – 3

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. <i>Простые числа</i>	<b>4</b>		<b>8</b>	<b>23</b>	<b>35</b>
Бесконечность различных множеств простых чисел	2		2	8	14
Распределение и свойства простых чисел	1		3	8	12
Теоремы Вильсона, Ферма, Эйлера	1		3	7	11
Раздел 2. <i>Основные функции в теории чисел</i>	<b>4</b>		<b>8</b>	<b>23</b>	<b>35</b>
Функции Эйлера, Мёбиуса, Римана	1		2	8	11

Число и сумма делителей. Мультипликативность	1		3	8	12
Свойства мультипликативных функций	2		3	7	12
Раздел 3. <i>Уравнения с целочисленными решениями</i>	<b>5</b>		<b>9</b>	<b>23</b>	<b>37</b>
Задачи, приводящие к уравнениям в целых числах. Решение олимпиадных задач, линейные уравнения	1		3	8	12
Уравнения Ферма, Эйлера, Пелля	3		3	8	14
Проблема Варинга и теорема Гильберта.	1		3	7	11
Раздел 4. <i>Дзета-функция Римана</i>	<b>4</b>		<b>9</b>	<b>24</b>	<b>37</b>
Определение и свойства дзета-функции Римана	1		3	8	12
Формула Эйлера. Аналитическое продолжение	2		3	8	13
Гипотеза Римана и её связь с арифметическими задачами	1		3	8	12
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР / ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП	<b>17</b>	–	<b>34</b>	<b>93</b>	<b>144</b>

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Контрольные вопросы

#### Раздел 1

1. Основная теорема арифметики
2. Теорема Ферма
3. Теорема Эйлера
4. Распределение простых чисел
5. Теорема Гильберта о суммах степеней
6. Теорема Вильсона
7. Теорема Чебышёва
8. Теорема Адамара
9. Теорема Валле-Пуссена

#### Раздел 2

10. Функция Эйлера
11. Функция Мёбиуса
12. Функция Рамануджана
13. Число и сумма делителей
14. Мультипликативность и вполне мультипликативность
15. Свойства мультипликативных функций.
16. Суммирование мультипликативных функций.
17. Производящие функции
18. Метод комплексного интегрирования

#### Раздел 3

19. Великая теорема Ферма
20. Уравнение Пелля.
21. Уравнение Эйлера
22. Теорема Туэ-Зигеля-Рота.
23. Уравнение Каталана

24. Бинарные проблемы
25. Теорема Клоостермана

#### Раздел 4

1. Теорема Сельберга
2. Интегральные представления
3. Плотностные теоремы
4. Гипотеза Римана
5. Обобщения гипотезы Римана
6. Границы нулей

#### 7.2. Темы докладов (рефератов)

7. Великая теорема Ферма
8. **Теоремы Чебышёва**
9. **Теоремы Адамара и Валле-Пуссена**
10. **Теоремы о близнецах**
11. **Простые числа в прогрессиях**
12. **Теорема Дирихле**
13. **Теорема Линника**
14. **Теорема Гильберта**
15. **Основные методы, применяемые при исследовании простых чисел**
16. **Основные свойства мультипликативных функций**
17. Плотностные теоремы
18. Гипотеза Римана
19. Обобщения гипотезы Римана
20. Метод Харди-Литтльвуда
21. Проблема Гольдбаха
22. Распределение простых чисел в среднем

#### 7.3. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике темам:

- нахождение производящих функций;
- асимптотическое суммирование мультипликативных функций
- решение диофантовых уравнений

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

#### 7.4. Образец содержания экзаменационного билета (при наличии экзамена по дисциплине)

1. Определение мультипликативной функции
2. Теорема Эйлера
3. Теорема Вильсона

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

## 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

### 8.1. Семестр 1

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-3	Организационно-учебная работа в аудитории	5
	Самостоятельная работа	5
	Контрольные работы по практике	45
	Контрольная работа по теоретическому материалу	45
ИТОГО		100
Промежуточная аттестация		100
Общий итог за семестр		100

### Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

## 9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной

доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

## 10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 10.1. Основная литература

1. Волчков В.В. Современные методы математических исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков – Донецк: ДонНУ, 2017. – Электронные данные (1 файл). - 736 с.
2. Волчков В.В. Методы решения математических задач [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков – Донецк: ДонНУ, 2017. – Электронные данные (1 файл).
3. Карацуба , А.А. Основы аналитической теории чисел/ А.А. Карацуба. –М. : Наука , 1983. -240с.

### 10.2. Дополнительная литература

1. Манин, Ю. И. Введение в современную теорию чисел / Ю. И. Манин, А. А. Панчишкин. - Изд. 2-е. - Москва : Изд-во МЦНМО, 2013. - 552 с. Наука, 1991. - 576 с.
2. Нестеренко, Ю. В. Теория чисел : учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Математика" / Ю. В. Нестеренко. - Москва : Академия, 2008. – 264с.

## 11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.

2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. –Текст: электронный.

3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

4. Электронно-библиотечная система **«Лань»:** [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.



5. **ЭБС Юрайт**: электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ**: сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.
8. **Электронный архив ДонГУ**: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный.

## 12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).